Grado en Matemáticas
Examen de Análisis Funcional

1. Prueba que, para cada $x \in \ell_p$ $(1 < p < \infty)$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x(n)}{n}$ es absolutamente convergente y que definiendo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{n} \quad (x \in \ell_p)$$

se obtiene un funcional lineal continuo en ℓ_p. Calcula $\|f\|$ y prueba que f alcanza su norma, es decir, que existe $x \in \ell_p$ tal que $\|x\|_p = 1$ y $f(x) = \|f\|$.

2. Sean M y N subespacios cerrados de un espacio de Hilbert tales que $M \perp N$. Prueba que el subespacio $M + N$ es cerrado.

3. Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, justificando brevemente las respuestas.

   a) Sea X un espacio vectorial dotado con dos normas $\|\,.\,\|$ y $|||\,.\,|||$ no equivalentes. Si M es un subespacio vectorial de X con dimensión finita, entonces la aplicación identidad $I_M : (M, \|\,.\,\|) \to (M, |||\,.\,|||)$ es un isomorfismo topológico.

   b) Si X, Y son espacios de Banach y la dimensión de Y es finita, entonces todo operador lineal de X sobre Y es continuo.

   c) Si H es un espacio de Hilbert y M es un subespacio de H verificando que $M^{\perp} = \{0\}$, entonces $M = H$.

4. Desarrolla uno de los temas siguientes:

   a) Teorema de la proyección ortogonal.

   b) Sistemas ortonormales en espacios prehilbertianos.

Granada, 3 de noviembre de 2017